

基于“问题提出”的数学新定义型综合题教学^①

顿继安¹ 蔡明艳²

(1. 北京教育学院 100044; 2. 中国农业大学附中 100191)

1 问题的提出

培养学生“发现与提出问题的能力”是我国当前基础教育阶段的数学课程的重要目标之一,这一目标的实现,需要教师有意识地设计以学生为主体的问题提出活动,并通过有效的指导逐步提高学生提出问题的质量。

“问题提出”活动有两种主要设计方法(陈婷等,2021)^[1]:一是学生基于给定的情境提出数学问题,这些情境可能包括文字、数学表达式或图表;另一种是学生通过改变(或改编)已有的数学问题提出新的问题。两种方法使得问题先“从无到有”再“从有到优”,洞悉方法必将有助于学生发现与提出问题能力的提高。

新定义型综合题的设计体现了“从无到有”和“从有到优”的具体方法。作为“能力立意”的数学命题范式下出现的一种代表性的题目,新定义型综合题近年来广泛出现于各地的重要考试中。以北京为例,高考自2004年、中考自2012年起一直以这类题目作为“压轴题”,其特点是:先定义一个新概念作为情境,然后以新概念的定义为基本结构、逐渐与学段其他主干知识结合设计系列问题,题目的解答需要学生能够理解新概念,并具有一定的数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学学科能力,以及分析与综合、自主学习、探究等更为普适性的能力。

新定义型综合题常借助一个应用新概念定义的直接性问题实现“从无到有”,如辨析某对象是否符合新概念定义的问题,或直接应用新概念定义中的规则计算、推理的问题,从学习的视角看,初次面对一个抽象的新概念的人总会试图通过具体例子对新概念进行初步理解,这样的问题是实

例问题化的产物,其提出容易而自然。其他的问题都可以看作是对直接性问题变式而得,根据是仅改变问题的表面形式还是改变了问题的数学结构,问题变式的类型可分为水平变式和垂直变式^{[2]-[3]}。水平变式通常会使用特殊化、反例等策略^[4],得到的新问题的解答思路和方法与原问题相同,题目的难度不变但有助于学生认识新概念的本质。垂直变式的常用策略有“由定到动”和“由正到反”等^[5]。“由定到动”属于美国学者西尔维(Silver,1996)^[6]等给出的条件式策略,即将原问题条件中的定值或定图形改为变量或动图形,但西尔维所说的条件式有些仅改变原问题条件的表面形式,得到的问题属于水平变式,而“由定到动”得到的新问题必定会改变原问题的数学结构、增加题目的难度,该词更加准确而直接地表达了问题间关系的特点;“由正到反”与西尔维等提出的对称式策略相同,即将原问题的已知条件与目标互换而得到新问题,本研究采用“由正到反”这一含义更为自明的词汇。

新定义型综合题提供了从一个新概念出发、由浅入深地提出问题的方法示范,如果学生能够认识到这一点,不但有助于其解决这类题目的能力的提升,也有助于其问题提出能力的发展。那么,如何发挥这类问题对于学生的问题提出能力培养的作用?本文以一道中考新定义型综合题的教学为例进行探讨。

2 选题说明

本研究的选题为2018年北京市中考数学试卷中的新定义型综合题(下称“闭距离试题”),试题如下:

对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 M, N ,

^① 本文为北京教育学院2021年度重大课题“指向立德树人教育根本任务的学科育人方式研究”(课题编号 ZD2021-01)成果。

给出如下定义: P 为图形 M 上任意一点, Q 为图形 N 上任意一点, 如果 P, Q 两点间的距离有最小值, 那么称这个最小值为图形 M, N 间的“闭距离”, 记作 $d(M, N)$.

已知点 $A(-2, 6), B(-2, -2), C(6, -2)$.

(1) 求 $d(\text{点 } O, \triangle ABC)$;

(2) 记函数 $y=kx(-1 \leq x \leq 1, k \neq 0)$ 的图象为图形 G . 若 $d(G, \triangle ABC)=1$, 直接写出 k 的取值范围;

(3) $\odot T$ 的圆心为 $T(t, 0)$, 半径为 1. 若 $d(\odot T, \triangle ABC)=1$, 直接写出 t 的取值范围.

本题满分 8 分, 当年北京全市 81725 名有效考生的得分率为 0.24, 三问的得分率分别为 0.46, 0.29 和 0.15^[7], 为最近五年以来的最低. 根据已有研究, 问题提出亦可以作为提高学生问题解决能力的教学策略^[8], 也有研究发现通过增强学差生的提问意识可以显著提高其数学成绩^[9]. 新定义型综合题的解决关键在于对新概念的理解, 当学生基于新概念提出问题时, 需要其分析新概念的构成要素及其关系、建立新概念与已有经验、知识的联系, 这必将有助于深入理解概念、获得这样一道高难度问题的解决思路和方法.

“闭距离试题”中的问题设计方法的代表性, 以及“闭距离”这一概念自身的特点为其带来的问题提出的发展空间, 则是本研究选择此题作为教学研究题材的原因.

2.1 问题的设计特点

问题(1)要求两个给定图形的“闭距离”, 属于指向概念理解的直接性问题, 问题(2)和(3)都可以看作是由问题(1)综合利用“由正到反”和“由定到动”法得到的垂直变式问题, 是问题(1)通过两个方面的变化而得到的: 定点 O 变为了动图形 G ; 问题的条件与目标的关系是相反的, 概括地说, 问题(1)是“已知两个图形求闭距离”, 问题(2)和(3)则是“已知两个图形的闭距离和一个图形, 求另一个图形”, 由于问题(2)、(3)中的图形 G 分别是由变量 k 决定的动线段和 t 决定的动圆, 相应求图形 G 的问题就具体化为求 k 或 t 的取值范围.

2.2 问题的设计的发展空间

“闭距离试题”中没有问题(1)的水平变式问题, 该问题的求解在将点 O 与 $\triangle ABC$ 的“闭距

离”转化为求点 O 到三条线段的“闭距离”的最小值后, 由于点 O 与三条线段关系的属于比较普遍的情况, 因此, 可进一步转化为求点 O 到三条线段的距离, 这未能显示出“闭距离”与距离的不同. 对学习者来说, 当初次接触一个与已知概念有紧密关系的新概念时, 辨析“这个概念与我熟悉的概念有何联系与区别”是重要的, 日常教学中往往通过设计水平变式问题实现, 如将问题(1)中的点 O 变为点 $P(-3, -3)$, 求 $d(P, \triangle ABC)$, 这个问题与问题(1)的解决思路与方法完全相同, 但 P 点到 $\triangle ABC$ 的三条边各自的“闭距离”并不都等于点 P 到三条线段的距离从而有助于学生形成更丰富的概念表象、促进更深刻的理解.

“闭距离”概念自身的特点赋予了其生长出现实问题的空间. 与许多考试中新定义的概念几乎没有现实意义和发展性、纯粹是一个为考试而专门创造不同的是, “闭距离”的定义基本上与高等数学中两个图形间的距离定义相同(出于严谨性的需要, 中学数学无法定义任意两个图形间的距离, 如对于一个开线段与圆间的距离需要用到的极限知识而中学数学未学), 也具有现实意义, 生活中物体的距离实质上就是两个物体所抽象出的图形间的“闭距离”, 因此, 尽管从考试的角度看, 中考新定义型综合题从未出现过有现实情境的问题, 但从教学的角度看, “闭距离”概念为学生提出有现实背景的问题提供了空间, 有助于培养学生将抽象的数学概念现实化的意识.

3 基于问题提出能力培养的“闭距离试题”教学实践

基于问题提出的新定义型综合题的教学需要整体设计, 一些题目直接给出问题后引导学生关注问题的特点, 还需要选择一些题材为学生提供基于新概念提出问题的机会. “闭距离试题”的教学实践采用了后一种思路.

为了更充分地了解学生以便更好地组织交流, 教师课前通过学案布置了问题提出活动:

根据下面给出的“闭距离”的定义, 设计 1—2 个问题, 并作出解答.

(定义如上, 这里略)

全班共 28 位同学, 设计的 56 个题目中, 有 5 个属于“求两个定图形的闭距离”的源问题, 4 个单纯使用由正到反策略的垂直变式问题, 单纯使

用由定到动策略设计的垂直变式问题 30 个, 综合使用由两种策略设计的垂直变式问题 17 个, 下表列出了各类题目的数量及代表性案例:

问题类型	问题数量	示例
直接性问题	5	已知 M 为 x 轴上一点, 坐标为 $(3, 0)$, N 为圆心在原点、半径为 1 的圆, 求 $d(M, N)$.
由正到反式	4	已知一次函数 $y = x + b$ 与半径为 1 的圆 O 的“闭距离”为 1, 求 b 值.
由定到动式	30	一次函数 $y = kx + 2$ 与 y 轴交于点 D , $\triangle ABC$ 中, $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$, 求 $d(D, \triangle ABC)$ 的最小值.
综合式	17	已知点 $E(a, 4)$, $F(a+2, 3)$, 作以 O 为圆心, 半径为 2 的圆. 当 $d(EF, \text{圆 } O) \leq 3$ 时, 求 a 的取值范围.

调研表明, 学生能够利用新的概念自主设计问题, 将新概念与圆、一次函数等建立联系. 课堂中主要通过三个活动推进: 问题提出的展示交流, 问题的结构化整理, 中考原题的特点分析. 下面报告课堂的主要过程.

3.1 问题提出的展示交流

这一活动的主要任务是请一些学生介绍自己设计的问题, 引导学生对题目的结构和设计思路进行深入交流.

首先展示的两个直接性问题, 即直接求两个图形的“闭距离”的问题:

问题 1(生 1): 以 O 为圆心, 半径为 2 做一个圆. 再做一条直线. 已知这条直线过 $(4, 0)$ 、 $(0, 4)$ 两个点. 求这条直线与 $\odot O$ 的闭距离.

问题 2(生 2): 如图 1 所示, 已知 $\odot Q$ 的半径

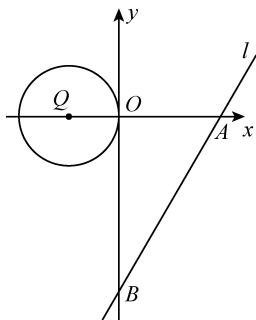


图 1

是 2, 圆心 Q 的坐标为 $(-2, 0)$, 直线 $l: y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$ 分别交 x 、 y 轴于 A 、 B , 求 $d(\odot Q, l)$.

生 2 还介绍了自己的想法: “为了计算方便而选了一个比较特殊的直线, 能保证 $\text{Rt}\triangle OAB$ 中, $\angle OAB$ 是 30° ”, 并强调“这个题目和生 1 题目的本质是一样的, 都是已知特殊直线和圆, 求它们的闭距离”.

在简要探讨了解题思路后, 引导学生关注两个题目的共性: 这两个求具体图形的“闭距离”, 解法都是直接应用定义进行求解, 根据学过的知识, 求直线与圆之间的“闭距离”问题可以转化为点到直线的距离问题.

生 3 说自己的问题“也是一个与圆和直线有关的问题, 不过好像跟刚才两个题目有点不一样”:

问题 3:(如图 2) 已知点 $E(a, 4)$ 、 $F(a+2, 3)$, 作以 O 为圆心, 半径为 2 的圆. 当 $d(EF, \text{圆 } O) \leq 3$ 时, 求 a 的取值范围.

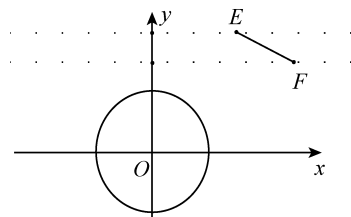


图 2

教师引导学生观察这个问题与刚才题目的不同之处, 并发起了一段关于题目的设计思路的对话.

学生(七嘴八舌): 这个是线段, 而且让线段动起来了.

师: 生 3 说一下自己是怎么想到这样设计题目的呢?

生 3: 我刚开始编了一个直接用定义的题目, 也是求直线到圆的闭距离. 然后觉得太简单了, 就想到能不能让图形动起来呢? 然后就编了 2 个动态的问题, 一个是直线动, 一个是圆动. 这个题目是直线动的题目.

师: 怎么个动法?

生 3: 大家结合图形看(图 2): E 、 F 都在与 x 轴平行的直线上运动, 而且线段 EF 做平移运动.

师: 这个题目编得很漂亮! 非常巧妙地通过

让 E 和 F 动起来而让线段 EF 动起来,而且还不是随意动,而是让 E 和 F 都有条件地动:线段 EF 做平移运动.

之后,教师引导学生关注这个明显变得复杂了的题目的解答思路,大家认识到:这个问题的结构跟前两个问题是相反的,前两个是已知图形求闭距离,这个相当于是已知线段 EF 和 $\odot O$ 的闭距离值为 3,求线段 EF ,也就是求 a 的值.也认识到解决这一反过来的问题需要“化反为正”,关键还是要知道怎么求圆到线段的闭距离,然后确定 a 的值.

问题 3 除了问题结构变得复杂外,与前两个问题中要求的直线到圆的“闭距离”就是圆心到直线的距离不同的是,这里要求的线段到圆的“闭距离”的求法并非都是圆心到线段的距离,而是取决于圆心与线段的关系,也就是说求“闭距离”的细节也复杂了,教学中教师有意识地放慢了节奏,让学生既关注基于新概念的问题的整体的解决思路,又认识到新概念中的细节的重要性.

3.2 问题的结构化整理

三个问题展示后,教师引导学生关注它们的关系.

师:我们再看一下生 3 的这个题目,它兼具“由定到动”和“由正到反”两个特点,通过与前面两位同学的问题比较可以看到:可以从“闭距离”的概念出发提出非常直接的“求两个图形的闭距离”问题,还可以利用“由正到反”和“由定到动”两种基本方法提出问题,也可以将两种方法结合起来,设计更为综合、复杂的问题.

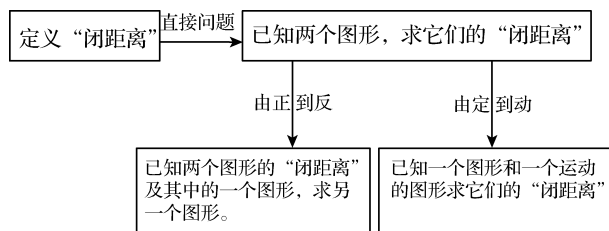


图 3

之后,请学生用这一结构对自己课前设计的问题进行分析,学生们发现自己所设计的题目都可以归到直接问题、由正到反、由定到动、综合法等类别中.

3.3 以结构的观点观察和分析中考原题

中考题目属于专家精心设计的作品,既有考查学生学习的作用,也体现了对学生的学和教师的教的引导.中考原题也是学生最为关心和感兴趣,所以,在教学的最后阶段,教师出示 2018 年的中考原题中的三个问题,请学生对其中问题的特点进行分析并与自己设计的问题比较.

学生很快就看出了其中的奥秘,指出了其中的问题(1)是直接问题、问题(2)和问题(3)都是综合利用“由正到反”和“由定到动”两种方法“变”出来的.教师在点评学生“看穿了中考题的设计思路”后,请学生思考“这里的问题(1)设计得怎样?”课堂安静了一会儿之后,渐渐学生开始表达自己的发现:

生 6:这道题是让求点到三角形的距离,实际上就是求点到线段的闭距离.刚才我们讨论生 3 的题目时知道点到线段的闭距离的求法特殊,所以我觉得这道题出得好.

生 7:我觉得这道题把“闭距离”与平时的距离概念的不同之处考出来了,这一点我没体现,我出的题是求直线与圆的“闭距离”,就是平时的距离,所以很好求,点到直线的距离也是这样,也好求,但点到线段的距离就不同了,需要分类讨论.

师:非常好!这道题让大家关注到了“闭距离”这一新概念与自己熟悉的距离概念之间的联系与区别,对于理解新概念有好处,可以看作是命题者对考生的一个善意提醒,还可以把它看作是对我们学习一个新概念的方法的提示.相信对“闭距离”概念的理解对于解决问题(2)和(3)这样“由正到反”和“由定到动”的结合起来的问题也是有好处的,实际上,解决这样问题,需要“化动为定”,其中的关键是抓边界,“化反为正”仍然利用两个图形的闭距离的求法建立等量关系或者方程,归根结底就是要理解“闭距离”概念,知道如何求两个图形的闭距离.今天作业大家通过解答这道题体会一下.

单纯从解答的角度看,问题(1)要求的点到线段的“闭距离”与点到线段的距离是一样的.然而,从概念理解的角度,结合具体例子认识新概念与原有类似概念的不同之处是重要的,从问题提出的角度看,从“两个图形的‘闭距离’就是平常说的距离吗?”这样的疑问出发选择图形,使它们的“闭

距离”与平常说的距离不同会使得问题变得丰富和有特色.

4 研究反思与启示

4.1 教学效果

问题提出活动能够提高不同学生的学习参与度^[10],本研究也证实了这一点.学生的参与度的提高表现在课前自主设计问题、课上的问题特征与解决方法的讨论以及问题结构化的全过程中,教学明显促进了学生对提出问题的方法的认识,也促进了学生整体理解新定义型综合题的结构和提高解决这类问题的能力.

课后通过开放性问卷调研揭示了学生的具体收获.80.8%的学生表示自己“了解了新定义型综合问题的命题思路”,一些学生表示自己认识到了更为丰富的提出问题的方法:“可以将一道新定义综合题大致分为3个部分:概念引入;概念正用;概念逆用,通常需要动态角度分析,多角度分析等等”、“我自己设计的问题都是求静态图象的闭距离问题,通过这节课,我以后可以像课堂上提出问题的同学一样,化静为动,那样就可以使题目更加灵活”.全体学生都表示增强了解决新定义型综合问题的信心,代表性的体会:“我学会了站在出题者的角度看问题,不仅视野全面,而且对定义的理解也更加深刻”、“拿到一个完全陌生的定义,不那么害怕了,可以通过问题认真理解这个定义本身”、“我充分认识到理解定义的重要性,同时也要拥有不放弃的精神,抓住题目的共同点,从不变量入手,将复杂问题转化为简单题”.

教学效果在延迟性评价中有着更为突出的表现.往届许多学生往往对作为压轴题的新定义型综合题畏难,而参与本研究的学生在随后的学习中则表现出极高的热情、信心和能力,更多的学生敢于尝试解决、经常主动寻求教师对其中的一些难题的指导,一些学生还与教师探讨题目的设计特点.

4.2 进一步的研究

目前考试中的数学新定义型综合题中的新概念,都未交待其现实或数学背景,试题也未见与现实建立联系的情形,这与学校数学中基础知识的产生与应用过程不同.基础知识的学要考考虑学生应用数学知识解决实际问题能力的培养,在问

题提出活动中亦要引导学生提出有现实背景的问题,丰富学生“用数学的眼光观察世界”的培养途径.

本研究作了初步探索.在后续教学中教师引导学生思考“闭距离”的现实意义并提出有现实背景问题,一组学生提出了一个居民区附近的高铁修建问题:

如图4所示,一个居民小区成矩形,四周围墙分别是东西和南北走向,在小区西侧100米有一条南北走向的东府大道,小区南侧有一条东西走向的小路,东府大道与小路的交汇处记为 O , O 点到小区的“闭距离”为200米.根据规划,有一条高铁线路经过小区的西南侧,高铁线路为北偏西 60° 的直线.若高铁噪音影响的范围为500米,请问高铁应修在何处才能保证小区居民不受噪音的困扰?

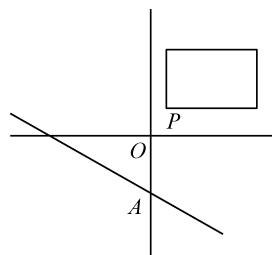


图4

两个划线处是学生在教师的指导下修改而成的:前者原表述为“小区拐角 P 到点 O 的距离为200米”,后者原表述为“高铁线路与东府大道的交汇处 A 与 O 之间的距离至少是多少”,两处修改都未改变情境和问题的本质,但是“闭距离”一词的使用使得叙述更为自然流畅、问题更显真实和有意义,也更清晰地揭示了“闭距离”概念的现实意义.这一问题的提出和完善推动了学生看到一个抽象的数学概念的实际意义并用简洁准确的数学语言来表达,有益于发展其数学化能力即“在数学世界和现实世界之间转化的能力”^[11].

日常教学中教师都会设计变式题组以促进学理解和应用新知,这样的活动也可探索通过组织学生以新知为情境提出问题、解决问题的方式进行,通过持续的实践和指导学生提出的问题的质量会提高,问题解决的能力也会同步发展.

(下转第49页)

- 考[J]. 数学教育学报, 2019, 28(1): 8-11
- [9] 刘存华, 王亚婷, 周莹. 数学核心素养视域下的高中教材习题比较研究——以“三角函数”为例[J]. 数学教学研究, 2019, 38(5): 50-53
- [10] 郭玉峰, 赵坤. 数学核心素养在高中教材习题中的表现研究: 以“函数”为例[J]. 教育科学研究, 2019(3): 68-74
- [11] 殷木森. 巧设空间形式 突显直观想象——以近三年高考全国卷立体几何选填题为例[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2018(15): 14-15
- [12] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 6; 104
- [13] National Council of Teachers of Mathematics. Principles and standards for school mathematics[R]. Reston: 2000
- [14] Clements D H, Sarama J. Effects of a Preschool Mathematics Curriculum: Summative Research on the Building Blocks Project[J]. Journal for Research in Mathematics Education, 2007, 38(2): 136-163.
- [15] Presmeg N. Research on visualization in learning and teaching mathematics[J]. 2006
- [16] 闫佳洁, 张定强. 高考试题中的“数学运算素养”解析——以近五年新课标全国理科卷Ⅱ为例[J]. 中学数学杂志, 2018(11): 49-53
- [17] 张定强, 裴阳. 探析建模思想 落实核心素养——近五年高考数学建模思想考查的特征分析及启示[J]. 考试研究, 2018(6): 85-90
- [18] 鲍建生. 中英两国初中数学期望课程综合难度的比较[J]. 全球教育展望, 2002, 31(9): 48-52
- [19] 任子朝, 陈昂, 赵轩. 数学核心素养评价研究[J]. 课程·教材·教法, 2018, 38(5): 116-121
- [20] 柯跃海, 陈清华. 高考数学命题质量评价的基础与方法[J]. 数学教育学报, 2020, 29(1): 48-51

(上接第 34 页)

参考文献

- [1] 陈婷, 李兰, 蔡金法. 中国小学数学“问题提出”教学的研究与实践——基于《小学数学教师》和《小学教学》(数学版)中“问题提出”文章的分析[J]. 数学教育学报, 2021, 30(1): 19-24
- [2] 张奠宙. 中国数学双基教学[M]. 上海: 上海教育出版社, 2006: 88
- [3] 孙旭花, 黄毅英, 林智中, 张奠宙. 问题变式: 结构与功能的统一[J]. 课程·教材·教法, 2006(05): 38-42
- [4] [5] 顿继安. 问题变式视角下数学新定义型综合题的设问路径——以 2020 年北京市中高考数学题为例[J]. 基础教育课程, 2020(Z2): 101-107
- [6] Silver, Edward A. Mamona-Downs, et al. Posing mathematical problems: An exploratory study[J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1996, 27(3): 293-309
- [7] 北京教育考试院. 2018 年北京中考试题评价报告 [M]. 北京: 开明出版社, 2018: 35
- [8] [10] 张玲, 宋乃庆, 蔡金法. 问题提出: 基本蕴涵与教育价值[J]. 中国电化教育, 2019(12): 31-39
- [9] 古征峰, 方均斌. 高中生的数学提问意识与学业成绩的相关性研究[J]. 数学通报, 2013, 52(10): 18-21+27
- [11] K. 斯泰西, R. 特纳. 数学素养的测评: 走进 PISA[M]. 曹一鸣, 等, 译. 北京: 教育科学出版社, 2017: 85

(上接第 40 页)论题的反省, 还要对问题作进一步宏观上的认识和理解, 透过现象看本质, 改变问题的提问方式、覆盖领域、形式结构以及应用范围等, 以实现对问题的拓展与延伸, 促进学生深刻了解相关解题方法与策略, 帮助学生内化为具身性的解题知识和能力、数学思维与素养.

综上, “4F”解题教学遵循认知建构教学原理, 通过解题“发问、发现、发省和发展”四个环节的解题教学, 助力学生对先前知识和化归、类比、直觉、联想等思想方法的综合运用, 帮助学生在自然状态下萌发和生长解题思维, 训练解题能力, 提升解题素养, 圆满践行了解题理论指导下的解题教学实践. 实践证明, “4F”解题教学法不仅教学

意图明显, 教学思路清晰, 而且能充分激发和调动学生的课堂参与热情, 营造良好的课堂教学氛围, 有效地提高解题教学质量.

参考文献

- [1] 李渺, 刘芸, 万新才. 经历即学习——高中数学教学案例学习 [M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 2009
- [2] 段志贵. 变通: 让解题有更充分的预见[J]. 数学通报, 2017, 56(12): 50-54
- [3] 徐彦辉. 数学解题后的“回顾与反思”与数学问题的提出——探索一种通过“回顾与反思”来提出数学问题的模式与方法 [J]. 数学教育学报, 2015, 24(1): 9
- [4] 徐伯华, 朱凤琴. 论波利亚的元认知思想[J]. 数学教育学报, 2008, 17(3): 14