

等差数列与高阶等差数列

100027 北京东直门外胡家园小区 11-412 明知白

1 什么是高阶等差数列

请看数列

$$6, 12, 20, 30, 42, 56, \dots, \quad (1)$$

它的构成有什么规律呢? 不难发现: 每相邻两项的差(后项减前项)是

$$6, 8, 10, 12, 14, \dots, \quad (2)$$

它是一个等差数列, 再求它的差数列(后项减前项), 得

$$2, 2, 2, 2, \dots, \quad (3)$$

是一个常数列, 于是我们称①为二阶等差数列, 称②为①的一阶差数列, ③为①的二阶差数列.

再看数列

$$1, 2, 4, 10, 23, 46, 82, \dots, \quad (4)$$

它的一阶差数列是

$$1, 2, 6, 13, 23, 36, \dots,$$

它的二阶差数列是

$$1, 4, 7, 10, 13, \dots,$$

它的三阶差数列是

$$3, 3, 3, 3, \dots,$$

这是一个常数列, 于是称数列④是三阶等差数列.

一般地, 有如下的定义:

如果一个数列的第 $r(r \in \mathbf{N}^*)$ 阶差数列是一个非零的常数列, 那么这个数列就叫做 r 阶等差数列.

显然, 中学课本中所讲的非常数的等差数列是一阶等差数列, 而常数列可以看作是零阶等差数列.

为什么要研究高阶等差数列呢? 这是从求数列的通项公式引发出来的.

例1 求数列

$$6, 12, 20, 30, 42, 56, \dots \quad (1)$$

的一个通项公式.

解 设数列①为 $\{a_n\}$, 考虑它的一阶差数列

$$6, 8, 10, 12, 14, \dots,$$

它是一个等差数列, 记作 $\{b_n\}$, 则其通项

$$b_n = 6 + (n-1) \times 2 = 2n + 4,$$

于是有

$$a_2 - a_1 = b_1 = 6,$$

$$a_3 - a_2 = b_2 = 8,$$

$$a_4 - a_3 = b_3 = 10,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_n - a_{n-1} = b_{n-1} = 2n + 2,$$

将以上 $(n-1)$ 个式子相加(即等号两边分别相加), 得

$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= 6 + 8 + 10 + \dots + 2(n+1) \\ &= \frac{[6 + 2(n+1)](n-1)}{2} \\ &= (n+4)(n-1). \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 = 6,$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= (n+4)(n-1) + 6 \\ &= n^2 + 3n + 2 \\ &= (n+1)(n+2). \end{aligned}$$

问题获解.

上面这个求数列通项的方法, 叫做逐差法. 它是利用一个数列的差数列(这个差数列恰好是一个等差数列)的有限和, 求出原数列的通项公式的.

某些数列的构成规律不十分明显, 我们可以逐次求出它的各阶差数列, 如果某一阶差数列正好是等差数列或等比数列, 那么可以利用这些数列的有限和, 得出原数列的一个通项公式. 由于是逐次倒推求差, 所以称为逐差法. 通常我们把用逐差法求得的通项 a_n 与 n 之间的解析式, 叫做原数列的通项公式.

例2 把正的奇数列按

表1排列

(1) 试求 2007 位于表中的第几行第几列?

(2) 求表1中主对角线的数列.

1	3	9	19	33	...
7	5	11	21	...	...
17	15	13	23	...	...
31	29	27	25	...	...
...	...	...	...	...	...

表1

$$1, 5, 13, 25, 41, \dots \quad (1)$$

的通项 a_n 与前 n 项和 S_n .

解 (1) 把表中数列写成:

$$1, 3+5+7, 9+11+13+15+17, \dots \quad (2)$$

其中第 n 项(组)含有 $2n-1$ 个数, 它的末项为

$$2[1+3+5+\dots+(2n-1)]-1=2n^2-1.$$

设 2007 位于②中的第 n 组之中, 则 $2007 \leq 2n^2-1$. 它的最小整数解为 $n=32$, 即 2007 位于②中的第 32 组之中, 这一组的末项为

$$2 \times 32^2 - 1 = 2047,$$

而 $(2007-2007) \div 2 + 1 = 21$,

因此 2007 位于②中的第 32 组中的倒数第 21 个数, 依表中各数的排列规则, 2007 位于第 32 行第 21 列.

(2) 考查数列①的差数列:

$$4, 8, 12, 16, \dots$$

是一个等差数列, 因此数列①是一个二阶等差数列, (事实上, 由奇数列在表中的排列规则可以直接判断①是二阶等差数列.)

设数列①为 $\{a_n\}$, 则

$$a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4,$$

$$a_3 - a_2 = 13 - 5 = 8,$$

$$a_4 - a_3 = 25 - 13 = 12,$$

.....

$$a_n - a_{n-1} = 4(n-1).$$

以上 $(n-1)$ 个式子相加, 得

$$a_n - a_1 = 4 + 8 + 12 + \dots + 4(n-1) = 2n^2 - 2n.$$

$$\because a_1 = 1,$$

$$\therefore a_n = 2n^2 - 2n + 1 (n \geq 2).$$

当 $n=1$ 时上式成立,

故 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = 2n^2 - 2n + 1$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k^2 - 2k + 1) = 2 \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + n$$

$$= 2 \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - n(n+1) + n$$

$$= \frac{2}{3} n^3 + \frac{1}{3} n.$$

例 3 求数列

$$5, 6, 9, 16, 31, 62, \dots$$

的通项 a_n ④ 与前 n 项和 S_n .

分析 考虑数列的各阶差数列.

$$\text{原数列} \quad 5, 6, 9, 16, 31, 62, \dots$$

$$\text{一阶差数列} \quad 1, 3, 7, 15, 31, \dots$$

$$\text{二阶差数列} \quad 2, 4, 8, 16, \dots$$

由于二阶差数列是等比数列, 可用逐差法求原数列的通项公式.

解 设原数列为 $\{a_n\}$, 一阶差数列为 $\{b_n\}$, 二阶差数列为 $\{c_n\}$, 那么

$$b_2 - b_1 = c_1,$$

$$b_3 - b_2 = c_2,$$

$$b_4 - b_3 = c_3,$$

.....

$$b_n - b_{n-1} = c_{n-1}.$$

以上 $(n-1)$ 个式子相加, 得

$$b_n - b_1 = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{n-1}$$

$$= 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1}$$

$$= \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$$

$$= 2^n - 2 (n \geq 2)$$

$$\because b_1 = 1, \therefore b_n = 2^n - 1.$$

而 b_1 也符合上式, 故 $b_n = 2^n - 1 (n \geq 1)$.

$$\text{又 } a_2 - a_1 = b_1,$$

$$a_3 - a_2 = b_2,$$

$$a_4 - a_3 = b_3,$$

.....

$$a_n - a_{n-1} = b_{n-1},$$

$$\therefore a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1}$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} b_m = \sum_{m=1}^{n-1} (2^m - 1)$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} 2^m - (n-1)$$

$$= 2^n - 2 - (n-1)$$

$$= 2^n - n - 1.$$

$$\because a_1 = 5,$$

$$\therefore a_n = 2^n - n - 1 + 5 = 2^n - n + 4.$$

数列 $\{a_n\}$ 的关 n 项和

* 给出数列的前若干项, 数列的通项并不唯一. 本文中的“求 a_n ”, 是指“求一个 a_n ”, 或特指差数列为等差(u)数列.

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{m=1}^n (2^m - m + 4) \\
 &= \sum_{m=1}^n 2^m - \sum_{m=1}^n m + 4n \\
 &= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - \frac{n(n+1)}{2} + 4n \\
 &= 2^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2} - 2.
 \end{aligned}$$

2 高阶等差数列的通项公式与求和公式

利用逐差法可以求高阶等差数列的通项公式, 为使各阶差数列有明确的、有规律表示, 规定一个新的符号: $\Delta_n^{(r)}$, 它表示原数列的第 r 阶差数列的第 n 项. 这样 $\{a_n\}$ 及其各阶差数列是

$$\begin{aligned}
 &a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots (\text{原数列}) \\
 &\Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}, \Delta_3^{(1)}, \Delta_4^{(1)}, \Delta_5^{(1)}, \Delta_6^{(1)}, \dots (\text{一阶差数列}) \\
 &\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}, \Delta_3^{(2)}, \Delta_4^{(2)}, \Delta_5^{(2)}, \dots (\text{二阶差数列}) \\
 &\Delta_1^{(3)}, \Delta_2^{(3)}, \Delta_3^{(3)}, \Delta_4^{(3)}, \dots (\text{三阶差数列}) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\Delta_1^{(r)}, \Delta_2^{(r)}, \Delta_3^{(r)}, \dots (r \text{ 阶差数列}) \\
 &\Delta_1^{(r+1)}, \Delta_2^{(r+1)}, \dots (r+1 \text{ 阶差数列})
 \end{aligned}$$

其中 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 也可写成 $\Delta_1^{(0)}, \Delta_2^{(0)}, \Delta_3^{(0)}, \Delta_4^{(0)}, \dots$.

根据“阶差”的意义, 上述各元素之间有下列关系:

$$\begin{aligned}
 a_2 - a_1 &= \Delta_1^{(1)}, \text{ 即 } a_2 = a_1 + \Delta_1^{(1)}, \\
 a_3 - a_2 &= \Delta_2^{(1)}, \text{ 即 } a_3 = a_2 + \Delta_2^{(1)}, \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$a_n - a_{n-1} = \Delta_{n-1}^{(1)}, \text{ 即 } a_n = a_{n-1} + \Delta_{n-1}^{(1)}.$$

$$\text{又 } \Delta_3^{(1)} - \Delta_2^{(1)} = \Delta_2^{(2)},$$

$$\text{即 } \Delta_3^{(1)} = \Delta_2^{(1)} + \Delta_2^{(2)},$$

$$\text{一般地, 有 } \Delta_n^{(r)} - \Delta_{n-1}^{(r)} = \Delta_{n-1}^{(r+1)}, \text{ 即}$$

$$\Delta_n^{(r)} = \Delta_{n-1}^{(r)} + \Delta_{n-1}^{(r+1)} (n=2, 3, \dots, r \in \mathbf{N}^*),$$

如图 1 所示:

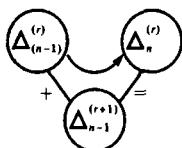


图 1

下面我们来寻求 r 阶等差数列的通项公式. 由关系式

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_{n-1} + \Delta_{n-1}^{(1)} (n=2, 3, 4, \\
 &\dots),
 \end{aligned}$$

$$\Delta_n^{(r)} = \Delta_{n-1}^{(r)} + \Delta_{n-1}^{(r+1)} (n=2, 3, 4, \dots; r \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{有 } a_2 = a_1 + \Delta_1^{(1)},$$

$$a_3 = a_2 + \Delta_2^{(1)}$$

$$= (a_1 + \Delta_1^{(1)}) + (\Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(2)})$$

$$= a_1 + 2\Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(2)},$$

$$a_4 = a_3 + \Delta_3^{(1)}$$

$$= a_3 + (\Delta_2^{(1)} + \Delta_2^{(2)})$$

$$= (a_1 + 2\Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(2)}) + (\Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(2)})$$

$$+ \Delta_1^{(2)} + \Delta_1^{(3)}$$

$$= a_1 + 3\Delta_1^{(1)} + 3\Delta_1^{(2)} + \Delta_1^{(3)},$$

$$a_5 = a_4 + \Delta_4^{(1)}$$

$$= a_4 + (\Delta_3^{(1)} + \Delta_3^{(2)})$$

$$= a_4 + (\Delta_2^{(1)} + \Delta_2^{(2)}) + (\Delta_2^{(2)} + \Delta_2^{(3)})$$

$$= a_4 + \Delta_2^{(1)} + 2\Delta_2^{(2)} + \Delta_2^{(3)}$$

$$= a_4 + (\Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(2)}) + 2(\Delta_1^{(2)} + \Delta_1^{(3)})$$

$$+ (\Delta_1^{(3)} + \Delta_1^{(4)})$$

$$= (a_1 + 3\Delta_1^{(1)} + 3\Delta_1^{(2)} + \Delta_1^{(3)}) + \Delta_1^{(1)}$$

$$+ 3\Delta_1^{(2)} + 3\Delta_1^{(3)} + \Delta_1^{(4)}$$

$$= a_1 + 4\Delta_1^{(1)} + 6\Delta_1^{(2)} + 4\Delta_1^{(3)} + \Delta_1^{(4)},$$

.....

观察上面各式的右边, 有两个特点: 原数列的第 r 项 $a_r (r=2, 3, 4, 5, \dots)$ 可由原数列的首项 a_1 与数列的前 $(r-1)$ 阶差数列的首项 $\Delta_1^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_1^{(3)}, \Delta_1^{(4)}, \dots, \Delta_1^{(r-1)}$ 表示, 而这些项的系数恰好是二项式 $(a+b)^{n-1}$ 展开式中的系数. 于是, 我们可以归纳得出

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_1 + C_{n-1}^1 \Delta_1^{(1)} + C_{n-1}^2 \Delta_1^{(2)} + C_{n-1}^3 \Delta_1^{(3)} + \dots \\
 &+ C_{n-1}^r \Delta_1^{(r)} + \dots + C_{n-1}^{n-1} \Delta_1^{(n-1)}.
 \end{aligned}$$

特别, 当数列 $\{a_n\}$ 为 r 阶等差数列时, $\Delta_1^{(r+1)} = \Delta_1^{(r+2)} = \Delta_1^{(r+3)} = \dots = 0$, 这样, 我们就得到了 r 阶等差数列的通项公式. 为简单起见, 用 $d_1, d_2, d_3, \dots$ 分别代替 $\Delta_1^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_1^{(3)}, \dots$. 把上面得到的结论写成定理.

定理 1 数列 $\{a_n\}$ 为 r 阶等差数列, 它的各阶差数列的首项为 $d_1, d_2, d_3, \dots, d_r$, 那么数列的通项公式是

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_1 + C_{n-1}^1 d_1 + C_{n-1}^2 d_2 + \dots + C_{n-1}^r d_r \\
 &= a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} d_2 + \dots \\
 &+ \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{r!} d_r. \quad \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

有了 r 阶等差数列的通项公式,再进一步寻求它的前 n 项和公式.

显然,数列 $\{a_n\}$ 是下述数列

$0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n,$
 $\dots$ 的一阶差数列,而这个新构造的数列的第 $(n+1)$ 项恰好是原数列的前 n 项之和 S_n . 由于 $\{a_n\}$ 是 r 阶等差数列,因此新构造的数列是 $(r+1)$ 阶等差数列,而它的首项为0,各阶差数列的首项分别为 $a_1, d_1, d_2, \dots, d_r$. 由公式①,它的第 $(n+1)$ 项 S_n 是

$$\begin{aligned} S_n &= 0 + C_n^1 a_1 + C_n^2 d_1 + C_n^3 d_2 + \dots + C_n^{r+1} d_r \\ &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2!} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} d_2 \\ &\quad + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-r)}{(r+1)!} d_r. \end{aligned}$$

这就是 r 阶等差数列前 n 项和公式,把它写成定理.

定理2 数列 $\{a_n\}$ 为 r 阶等差数列,它的各阶差数列的首项为 $d_1, d_2, d_3, \dots, d_r$,那么数列的前 n 项和公式是

$$\begin{aligned} S_n &= C_n^1 a_1 + C_n^2 d_1 + C_n^3 d_2 + \dots + C_n^{r+1} d_r \\ &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2!} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} d_2 \\ &\quad + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-r)}{(r+1)!} d_r. \end{aligned} \quad \textcircled{2}$$

特别, $r=1$,即数列 $\{a_n\}$ 是一阶等差数列,就是通常所说的等差数列,由公式①和②,得

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d, \\ S_n &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d, \end{aligned}$$

这正是中学课本中所讲的等差数列的通项公式与求和公式,大家都熟悉,由此可以帮助我们在记忆公式①和②.

利用定理1和定理2,可以直接求出高阶等差数列的通项 a_n 与前 n 项和 S_n .

例1 求数列6, 12, 20, 30, 42, 56, ...的通项 a_n 与前 n 项和 S_n .

解法2(公式法) 在上一节已经分析过,这是一个二阶等差数列,其首项为6,一阶与二阶差数列的首项分别是6与2,即 $a_1=6, d_1=6, d_2=2$,由公式①和②得

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} d_2 \\ &= 6 + 6(n-1) + (n-1)(n-2) \\ &= n^2 + 3n + 2, \\ S_n &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2!} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} d_2 \\ &= 6n + 3n(n-1) + \frac{1}{3}n(n-1)(n-2) \\ &= \frac{1}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{11}{3}n. \end{aligned}$$

下面再举一个例子说明公式①和②的应用.

例2 求数列

$$1, 2, 5, 16, 41, 86, \dots$$

的通项 a_n 与前 n 项和 S_n .

分析 考察所给数列 $\{a_n\}$ 的各阶差数列:

一阶差数列 1, 3, 11, 25, 45, ... ($d_1=1$);

二阶差数列 2, 8, 14, 20, ... ($d_2=2$);

三阶差数列 6, 6, 6, ... ($d_3=6$).

数列 $\{a_n\}$ 是三阶等差数列,可用公式①和②求 a_n 和 S_n .

解 数列 $\{a_n\}$ 是三阶等差数列,且 $a_1=1, d_1=1, d_2=2, d_3=6$,由公式①和②,得

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} d_2 \\ &\quad + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} d_3 \\ &= 1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \times 2 \\ &\quad + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \times 6 \\ &= n^3 - 5n^2 + 9n - 4, \\ S_n &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2!} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} d_2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} d_3 \\ &= n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}. \end{aligned}$$

下面我们再回过头来认真分析公式①和②的特点及相互关系,并由此引出两个重要定理.

公式①的右边是一个关于 n 的多项式,由于 $d_r \neq 0$,所以它是 n 的 r 次多项式. 公式②的右边是关

于 n 的 $r+1$ 次多项式, 且常数项为零. 可以证明: 它们的逆命题也是成立的.

定理 3 r 阶等差数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 一定是关于正整数 n 的 r 次多项式

$$a_n = b_r n^r + b_{r-1} n^{r-1} + \cdots + b_1 n + b_0 (b_r \neq 0). \quad (3)$$

反之, 如果一个数列的通项满足 (3), 那么这个数列一定是 r 阶等差数列.

证明从略.

定理 4 r 阶等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 一定是关于正整数 n 的 $r+1$ 次多项式:

$$S_n = b_{r+1} n^{r+1} + b_r n^r + \cdots + b_1 n + b_0 (b_{r+1} \neq 0). \quad (4)$$

反之, 如果一个数列的前 n 项和 S_n 满足 (4), 那么这个数列一定是 r 阶等差数列.

证明从略.

值得注意的是, 定理 4 中的 S_n 是常数项为零的 $r+1$ 次多项式, 即 $S_0 = 0$, 这一点在等差数列的求和问题中已经学习过, 即 $\{a_n\}$ 为等差数列的充要条件是它的前 n 项和形如

$$S_n = an^2 + b_n (a, b \text{ 为常数})$$

由定理 3 和定理 4 可以得到一个重要推论.

推论 如果一个数列的通项是 n 的 r 次多项式, 那么这个数列的前 n 项和一定是 n 的 $r+1$ 次多项式, 而且常数项为零. 运用定理 3、定理 4 及其推广, 我们又增加了求 r 阶等差数列的方法——待定系数法. 下面用待定系数法求例 1 中的数列的 a_n 与 S_n .

解法 3 因为数列 6, 12, 20, 30, 42, ... 是二阶等差数列, 所以它的通项 a_n 是 n 的二次多项式, S_n 是 n 的三次多项式, 且常数项为零.

设 $a_n = b_2 n^2 + b_1 n + b_0$, 令 $n = 1, 2, 3$, 得

$$\begin{cases} b_2 + b_1 + b_0 = 6, \\ 4b_2 + 2b_1 + b_0 = 12, \\ 9b_2 + 3b_1 + b_0 = 20. \end{cases}$$

解方程组, 得

$$b_2 = 1, b_1 = 3, b_0 = 2.$$

$$\therefore a_n = n^2 + 3n + 2.$$

再设 $S_n = \lambda_3 n^3 + \lambda_2 n^2 + \lambda_1 n$, 令 $n = 1, 2, 3$, 得

$$\begin{cases} \lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_1 = 6, \\ 8\lambda_3 + 4\lambda_2 + 2\lambda_1 = 18, \\ 27\lambda_3 + 9\lambda_2 + 3\lambda_1 = 38. \end{cases}$$

解方程组, 得

$$\lambda_3 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = 2, \lambda_1 = \frac{11}{3}.$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{11}{3}n.$$

解法 4 当用待定系数法求出 $a_n = n^2 + 3n + 2$ 后, 再利用 $\sum_{k=1}^n k$ 与 $\sum_{k=1}^n k^2$ 的求和公式做.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n (i^2 + 3i + 2) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{3}{2}n(n+1) + 2n \\ &= \frac{1}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{11}{3}n. \end{aligned}$$

小结 求高阶等差数列的通项 a_n 与前 n 项和 S_n 的方法大体上有以下四种.

1. 逐差法求 a_n

如果 $\{a_n\}$ 是二阶等差数列, 可以用逐差法求 a_n . 它是利用数列 $\{a_n\}$ 的一阶差数列 (是 A, P) 的和, 得到数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 的.

如果是三阶或三阶以上的等差数列, 用逐差法求 a_n 就比较费事了.

2. 公式法求 a_n 与 S_n

将原数列的首项与各阶差数列的首项代入定理 6 和定理 7 中的有关公式, 可以分别求出 a_n 与 S_n . 由于这两个公式是通常的 (一阶) 等差数列的通项公式与求和公式的推广, 不难记忆.

3. 待定系数法求 a_n 与 S_n

依据定理 8 和定理 9, 先假设 a_n 与 S_n 是某种形式的多项式, 利用待定系数法, 求出 a_n 与 S_n 来.

4. 利用自然数的方幂和公式求 S_n

当求出 a_n 后, 由于它是 n 的多项式, 再求 S_n 时, 可以利用自然数的方幂和公式, 特别是二阶或三阶等差数列, 由于 a_n 是 n 的二次或三次多项式, 可以利用 $\sum_{k=1}^n k^2$ 与 $\sum_{k=1}^n k^3$ 的求和公式, 而这两个公式是熟知的.

以上几种方法中, 以公式法与待定系数法最为重要, 特别是待定系数法, 它是中学数学中极为重要的方法, 值得重视.

(收稿日期: 20070518)